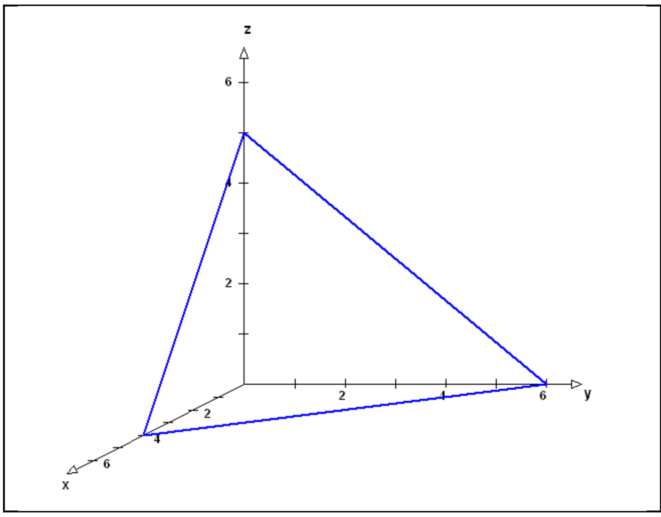
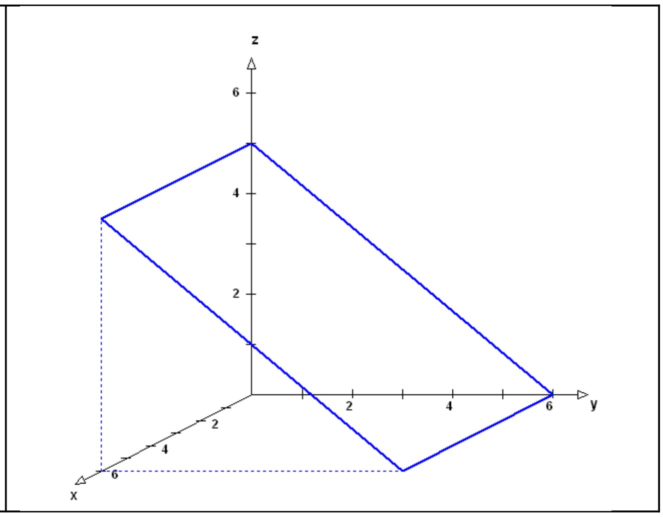
Ebenen

Grafische Darstellung; Parameterform; Normalenform; Koordinatenform; Winkel

Von Ebenen kann man nur Ausschnitte darstellen, z.B. Dreiecke oder Vierecke (siehe Beispiele).





<u>Aufgaben:</u>

1) Stelle für jede Ebene ($\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$) eine Parameterform auf ($\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$) .
<u>Hinweis:</u> $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen <u>Spannvektoren</u> der Ebene, weil sie die Ebene aufspannen !

2) Welche besondere Lage hat die zweite Ebene ?

3) Bestimme für jede Ebene einen so genannten Normalenvektor $\vec{n}$. Dies ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, also auch senkrecht auf beiden Spannvektoren. Wie kann man hier das Skalarprodukt verwenden ?

4) Bestimme für jede Ebene mithilfe des Normalenvektors $\vec{n}$ eine <u>Normalenform</u> bzw. eine <u>Koordinatenform</u> der Ebene (ggfs. im Buch informieren) .

5) Bestimme alle Winkel, welche die erste Ebene mit den Achsen bildet. Welchen Winkel bildet diese Ebene mit der xy-Koordinatenebene ?

6) Bestimme das Schnittobjekt der beiden Ebenen.

Lösungen:

Zu 1)

$$E1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$$

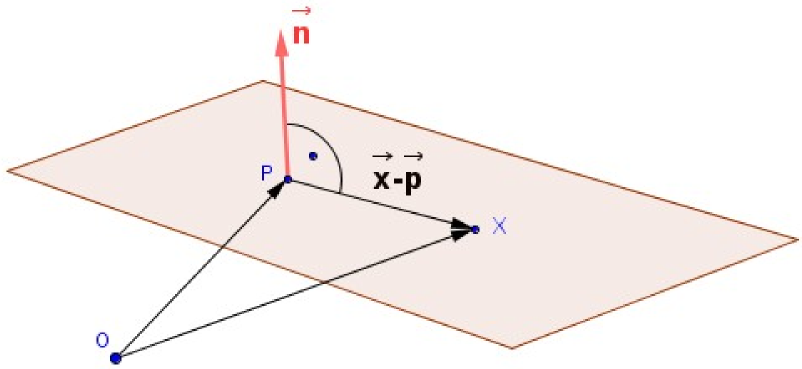
$$E2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Zu 2) Die zweite Ebene verläuft parallel zur x-Achse !

Zu 3) Normalenvektoren sind (mit MATRIX und rref bestimmt):

$$E1:\ \vec{n} = \begin{pmatrix}15\\10\\12\end{pmatrix} \qquad E2:\ \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\10\\12\end{pmatrix}$$

Zu 4) Eine Normalenform ergibt sich aus folgender Überlegung (Skizze):



Es gilt hier $\boxed{\vec{n}*(\vec{x}-\vec{p})=0}$ **Punkt-Normalenform der Ebene**

Hierbei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene.
$\vec{p}$ ist ein bekannter Stützvektor und $\vec{x}$ die Menge aller Stützvektoren der Ebene.

Für die Ebene E1 folgt dann: $\begin{pmatrix}15\\10\\12\end{pmatrix}*(\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix})=0$ **(Punkt-Normalenform von E1)**

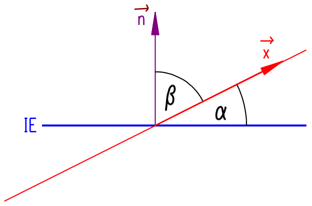
Für die Ebene E2 folgt ebenso: $\begin{pmatrix}0\\10\\12\end{pmatrix}*(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix})=0$ **(Punkt-Normalenform von E2)**

Löst man mithilfe des Distributivgesetzes die Klammer auf und rechnet das Skalarprodukt aus, so ergibt sich:

E1: $\begin{pmatrix}15\\10\\12\end{pmatrix}*\vec{x}=60$ bzw. E2: $\begin{pmatrix}0\\10\\12\end{pmatrix}*\vec{x}=60$ **(Normalenformen von E1 und E2)**

Schreibt man nun noch $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ und wendet das Skalarprodukt an, so erhält man

$15x + 10y + 12z = 60$ bzw. $10y + 12z = 60$ **(Koordinatengleichungen von E1 und E2)**



<u>Zu 5) Winkel zwischen $\mathbb{E}_1$ und x-Achse:</u>
(Normalenvektor verwenden)

In der Skizze ist α gesucht !

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}15\\10\\12\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{15^2+10^2+12^2}} = \frac{15}{\sqrt{469}} \approx 0{,}69 \quad \Rightarrow \beta = 46{,}2° \;;\; \text{also} \quad \underline{\underline{\alpha = 43{,}8°}}$$

Entsprechend für $\mathbb{E}_1$ und y-Achse: $\cos(\beta) = \frac{10}{\sqrt{469}} \quad \Rightarrow \beta = 62{,}5° \;;\; \text{also} \quad \underline{\underline{\alpha = 27{,}5°}}$

Entsprechend für $\mathbb{E}_1$ und y-Achse: $\cos(\beta) = \frac{12}{\sqrt{469}} \quad \Rightarrow \beta = 56{,}4° \;;\; \text{also} \quad \underline{\underline{\alpha = 33{,}6°}}$

Für $\mathbb{E}_1$ und die x-y-Ebene wird von <u>beiden</u> Ebenen der Normalenvektor verwendet und somit α direkt berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}15\\10\\12\end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{15^2+10^2+12^2}} = \frac{12}{\sqrt{469}} \approx 0{,}55 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 46{,}2°}}$$

<u>Zu 6) Schnitt beider Ebenen:</u>

·x	·y	·z	|	·1		
15	10	12	|	60		
0	10	12	|	60		
1	0	0	|	0	, also	x = 0
0	1	1,2	|	6	, also	y + 1,2z = 6

Deutung: $x = 0$ <u>und</u> $y + 1{,}2z = 6$ beschreibt eine Gerade in der y-z-Ebene !

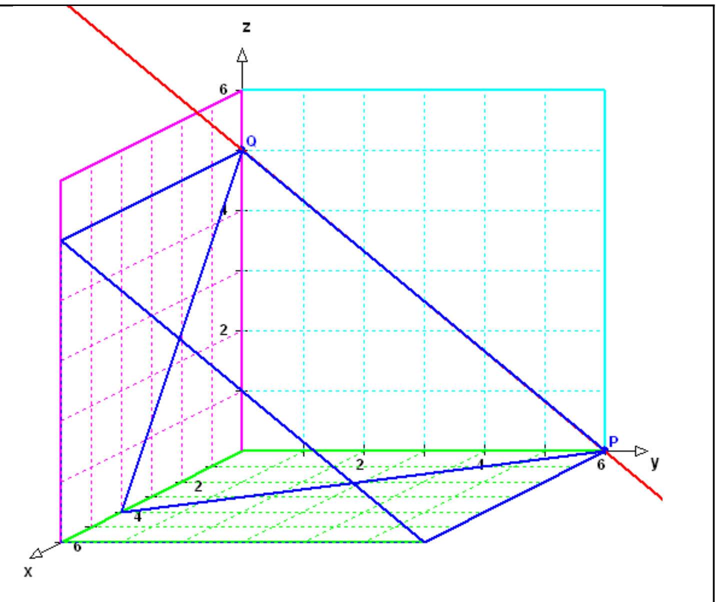
Wir bestimmen 2 Punkte dieser Geraden:
1. Ich wähle $z = 0 \Rightarrow y = 6$ P(0/6/0)
2. Ich wähle $y = 0 \Rightarrow z = 5$ Q(0/0/5)

<u>Ergebnis:</u>
E1 ∩ E2 = g mit:

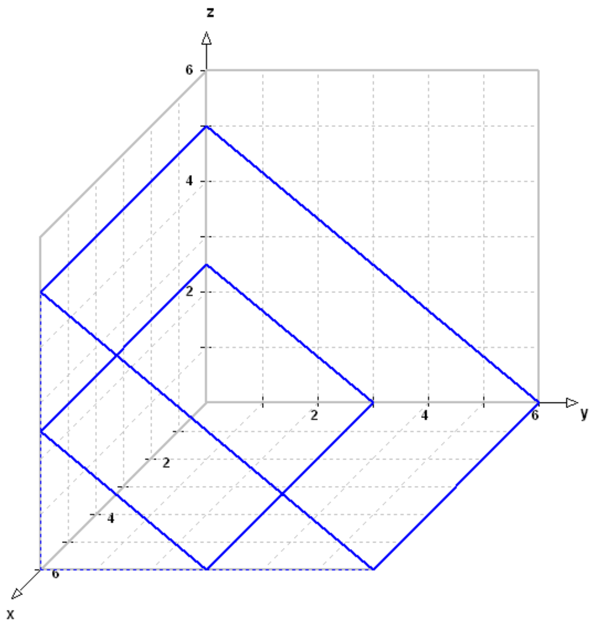
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}$$

(Schnittwinkel α = 43,839°)

<u>Anmerkung:</u> Die Schnittgerade (rot) ist bereits in der Ausgangsgrafik zu sehen ! Grafisch liegt also ein besonders einfacher Fall eines Ebenenschnittes vor .



Schnitt von **parallelen** Ebenen (In Koordinatenform):

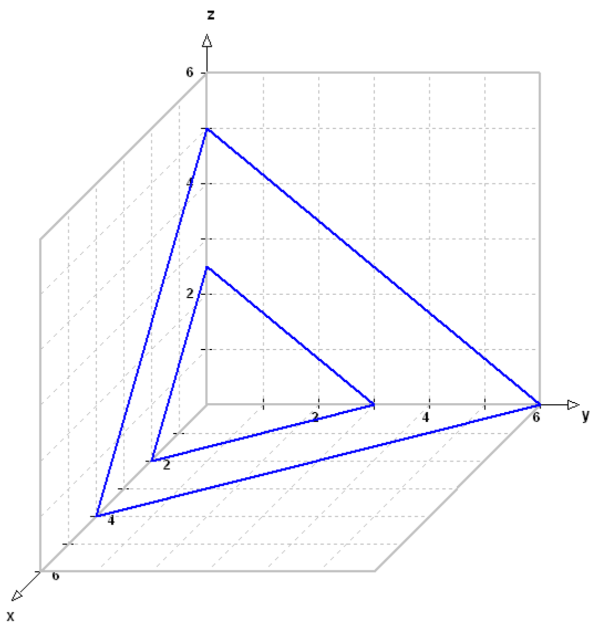


Koordinatengleichungen:

$10y + 12z = 60$
$20y + 24z = 60$

Welche Gleichung gehört zu welcher Ebene ?

Wie sieht man anhand der Gleichungen die Parallelität ?



Koordinatengleichungen:

$15x + 10y + 12z = 60$
$60x + 40y + 48z = 120$

Welche Gleichung gehört zu welcher Ebene ?

Wie sieht man anhand der Gleichungen die Parallelität ?

Weitere Fragen:

1) Was passiert, wenn man jeweils beide Ebenengleichungen in die Matrix des TI83 eingibt und diese mit rref vereinfacht ? Führe dies unten in der Tabelle durch !

```
·x    ·y    ·z    |  ·1
━━━━━━━━━━━━━━━━━━━━━━━━
                  |
                  |
────────────────────────
```

2) **Gleichheit von Ebenen:** Wie muss man die jeweilige 2. Gleichung ändern, damit die beiden Ebenen identisch sind ?