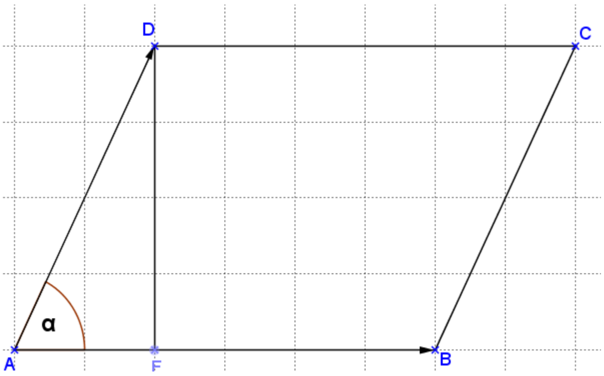
FLÄCHEN- UND RAUMINHALTE (ÜBERBLICK) Ac

1) Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD und des Dreiecks ABC:



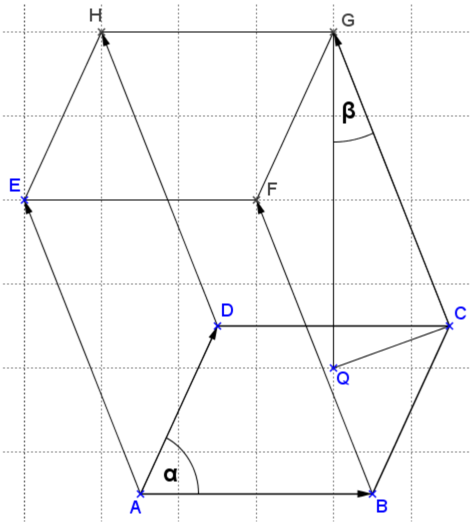
Es seien $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ definiert:

Dann ist $A_{Parall} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)$

Alternative(Vektorprodukt): $A_{Parall} = |\vec{a}\times\vec{b}|$
Der Beweis ist algebraisch schwierig !

Beim Dreieck ABC sei $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Dann ist $A_{Dr} = 0{,}5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha) = 0{,}5\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|$

2) Volumen des Spats („Parallelflach“ oder „schiefe Schachtel“) und der Pyramide:



Es seien $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ und $\vec{c}=\overrightarrow{AE}$ definiert . Q sei ein Lotfußpunkt :

Dann ist $V_{Spat} = \left|\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\beta)\,\right|$

Die wesentlich bessere Alternative(Vektorprodukt):

$$V_{Spat} = |(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}\,|$$

<u>Beweis:</u> $V_{Spat} = \left|\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\beta)\,\right|$

$= |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\beta)|$

$= |(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}\,|$

Das Volumen der Pyramide lässt sich auf das Spatvolumen zurückführen.
Für Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche gilt VPyr = VSpat / 6 und
für Pyramiden mit viereckiger Grundfläche gilt VPyr = VSpat / 3

<u>Erweiterung (Determinante):</u>

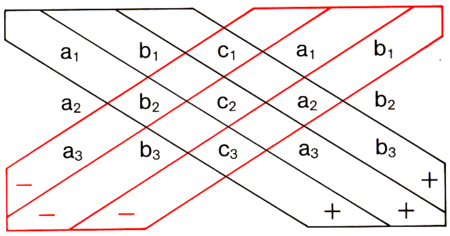
Das Spatprodukt kann auch als <u>Determinante</u> geschrieben werden !

Es gilt: $\quad |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}\,| \;= |\det\;(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)\,| \;= \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|$,

Man kann $\det\;(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ folgendermaßen berechnen:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$

Besser geht es mit diesem Rechenschema:



Beispiele:

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ Die Determinante ist $\det = 26$. Das Volumen der aufgespannten Pyramide ist $\frac{13}{3}$.

2) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$ Die Determinante ist $\det = 0$. Das bedeutet: Die 3 Vektoren liegen in einer Ebene.

<u>Hinweis:</u> Der det-Befehl steht auch im Matrix-Menü des TI83 zur Verfügung .