Inzidenz zweier Ebenen (in Parameterform gegeben)

Beim Schnitt von 2 Ebenen können 3 Fälle auftreten:

① Es entsteht eine Schnittgerade ② Die Ebenen verlaufen parallel ③ Die Ebenen sind identisch

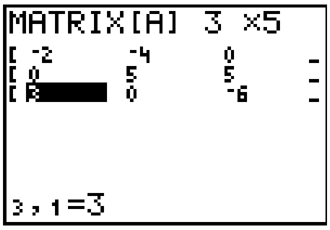
<u>Eine</u> Möglichkeit der Vorgehensweise ist das **<u>Gleichsetzen der beiden Vektorterme</u>**. Das entstehende LGS muss dann gelöst und die Lösung interpretiert werden. Dabei ist folgendes zu beachten :

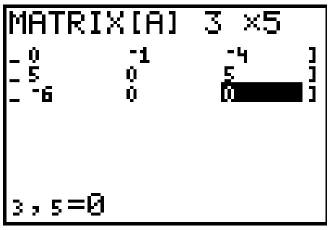
Zu ①: Das LGS liefert Beziehungen zwischen den Parametern derart, dass in einer Ebenengleichung nur noch ein Parameter übrig bleibt .
Zu ②: Das LGS enthält einen Widerspruch.
Zu ③: Das LGS liefert Beziehungen zwischen den Parametern derart, dass immer 2 Parameter in jeder Ebenengleichung stehen bleiben . Außerdem fällt eine (äquivalente) Zeile des LGS weg (0 = 0) .

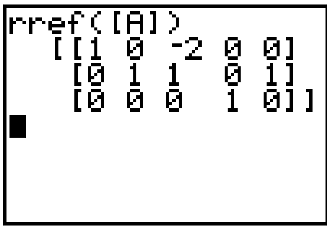
<u>Beispiel für Fall 1:</u>

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix} \qquad E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-5\\6\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{LGS: } \left|\begin{matrix}-2r-4t-v=-4\\ 5t+5u=5\\ 3r-6u=0\end{matrix}\right|$$

GTR-Lösung:







Ergebnis:
$r - 2u = 0$
$t + u = 1$
$v = 0$

Am einfachsten ist jetzt die Verwendung der 2. Ebenengleichung, weil dort v = 0 gilt.

Es folgt dann sofort, dass eine **Schnittgerade** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-5\\6\end{pmatrix}$ entstanden ist

<u>Anmerkung:</u> Falls keine solch einfache Beziehung wie v = 0 existiert, so sucht man sich eine Gleichung, in der nur r und t oder aber nur u und v vorkommen. Da der eine Parameter vom anderen abhängt, kommt man durch Einsetzen in die entsprechende Ebenengleichung zu einer Geradengleichung. Wenn auch dies nicht möglich ist, so muss man 2 Gleichungen verwenden, in denen einer der Parameter gleichzeitig vorkommt. Dies ist z.B. beim obigen Beispiel der Fall, denn r – 2u = 0 und t + u = 1 enthalten beide den Parameter u. Demnach kann man in der ersten Ebenengleichung r durch 2u und t durch 1 – u ersetzen. Es folgt dann:

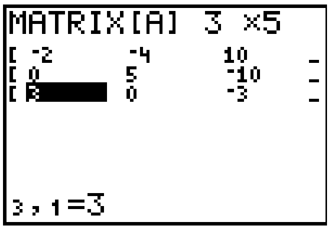
$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + 2u\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + (1-u)\begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix} - u\begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-5\\6\end{pmatrix}$$

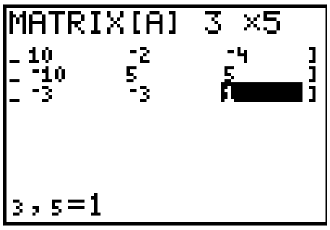
Man kommt also auch auf diesem Wege zum gleichen Ergebnis, jedoch mit viel mehr Aufwand .

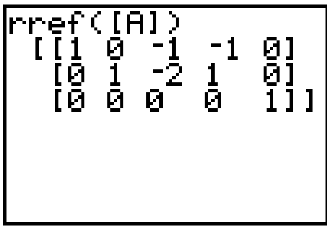
Beispiel für Fall 2:

$\mathbb{E}_1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbb{E}_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ LGS: $\left| \begin{array}{c} -2r - 4t + 10u - 2v = -4 \\ 5t - 10u + 5v = 5 \\ 3r - 3u - 3v = 1 \end{array} \right|$

GTR-Lösung:







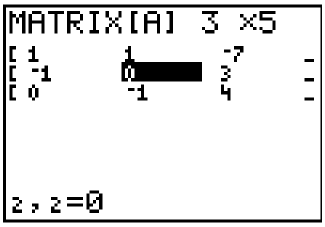
Ergebnis:
$r - u - v = 0$
$t - 2u + v = 0$
$0 = 1$ Widerspruch !

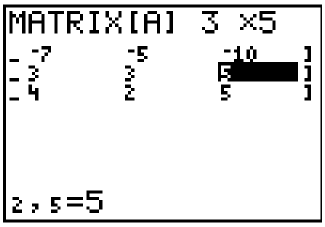
Also $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ **parallel**

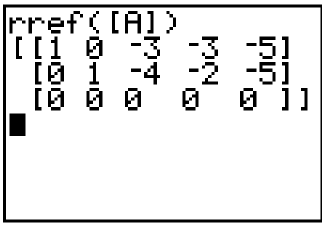
Beispiel für Fall 3:

$\mathbb{E}_1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbb{E}_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ LGS: $\left| \begin{array}{c} r + t - 7u - 5v = -10 \\ -r + 3u + 3v = 5 \\ -t + 4u + 2v = 5 \end{array} \right|$

GTR-Lösung:







Ergebnis:
$r - 3u - 3v = -5$
$t - 4u - 2v = -5$
$0 = 0$

Setzt man jetzt $r = 3u + 3v - 5$ sowie $t = 4u + 2v - 5$ in die erste Ebenengleichung ein, so folgt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3u + 3v - 5) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (4u + 2v - 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3u + 3v - 5 \\ -(3u + 3v - 5) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4u + 2v - 5 \\ 0 \\ -(4u + 2v - 5) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7u + 5v - 10 \\ -3u - 3v + 5) \\ -4u - 2v + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dies ist aber gerade der Vektorterm der zweiten Ebene. Also sind die beiden Ebenen **gleich** !