Inzidenz von Geraden und Ebenen

Beim Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene $\mathbb{E}$ können 3 Fälle auftreten:

① Es entsteht ein Schnittpunkt (Durchstoßpunkt)
② g verläuft parallel zu $\mathbb{E}$
③ g liegt in $\mathbb{E}$

<u>Eine</u> Möglichkeit der Vorgehensweise ist das Gleichsetzen der beiden Vektorterme. Das entstehende LGS muss dann gelöst und die Lösung interpretiert werden. Dabei sind die folgenden Zusammenhänge zu berücksichtigen :

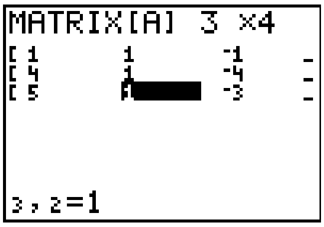
Zu ①: Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung für die 3 Parameter.
Zu ②: Das LGS enthält einen Widerspruch.
Zu ③: Das LGS liefert unendlich viele Lösungen für die 3 Parameter. (näheres weiter unten !)

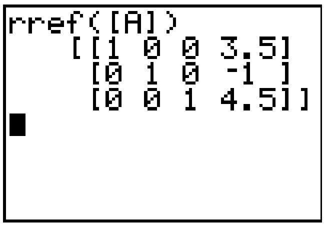
<u>Beispiele:</u>

① g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{E}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beim Gleichsetzen der Vektorterme entsteht das LGS $\left| \begin{matrix} r + t - k = -2 \\ 4r + t - 4k = -5 \\ 5r + t - 3k = 3 \end{matrix} \right|$

Eingabe und Verarbeitung mit dem GTR:





Eindeutige Lösung:

r = 3,5
t = -1
k = 4,5

Setzt man k = 4,5 in die Vektorgleichung für g ein, so ergibt sich der Ortsvektor des Schnittpunktes S :

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 18 \\ 21,5 \end{pmatrix}$. Daher ist der Schnittpunkt S(6,5/18/21,5).

② g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{E}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

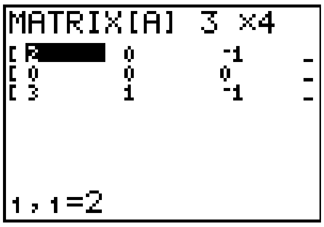
Beim Gleichsetzen der Vektorterme entsteht das LGS $\left| \begin{matrix} 2r - k = 4 \\ 0 = -4 \\ 3r + t - k = 6 \end{matrix} \right|$

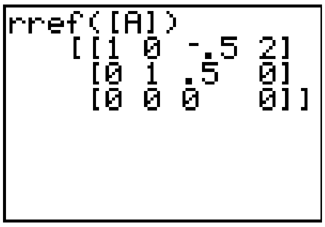
Hier sieht man sofort, dass in der zweiten Zeile ein Widerspruch entstanden ist. Daher braucht man nicht weiterrechnen und schließt: $g \cap \mathbb{E} = \{ \}$ bzw: $g \parallel \mathbb{E}$.

③ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{E}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beim Gleichsetzen der Vektorterme entsteht das LGS $\left| \begin{matrix} 2r - k = 4 \\ 0 = 0 \\ 3r + t - k = 6 \end{matrix} \right|$

Eingabe und Verarbeitung mit dem GTR:





Mehrdeutige Lösung:
(kein Widerspruch)
$r - 0{,}5k = 2$
$t + 0{,}5k = 0$
$0 = 0$

<u>Interpretation:</u>

r, t und k hängen voneinander ab. Für beliebig gewähltes k müssen r und t nach den obigen Gleichungen berechnet werden. Ersetzt man in der Vektorgleichung der Ebene r und t durch 2 + 0,5k sowie -0,5k, so erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + (2 + 0{,}5k) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-0{,}5k) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4 + k - 0 \\ -4 + 0 + 0 \\ -3 + 6 + 1{,}5k - 0{,}5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + k \\ -4 \\ 3 + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist aber genau der Vektorterm für die Gerade g (siehe oben). Also gilt $g \cap \mathbb{E} = g$!