Inzidenz von Geraden – Musterlösungen Ac

Der erste Schritt bei Inzidenzuntersuchungen (Untersuchungen der Lagebeziehung) ist immer die Prüfung auf **Parallelität** der Geraden .

Beispiel 1:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind **parallel**, weil ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind
(Alternative Formulierung: Die beiden Richtungsvektoren sind **kollinear** !)
Der Richtungsvektor von h ist hier das (-2)-fache des Richtungsvektors von g .

Zu prüfen ist jetzt noch, ob die Geraden sogar identisch sind. Dazu muss geprüft werden, ob der Differenzvektor der beiden Stützvektoren zu einem der beiden Richtungsvektoren kollinear ist :
(Warum das so sein muss kann man sich anhand einer **Vektorskizze** überlegen.)

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist jedoch kein Vielfaches eines der beiden Richtungsvektoren.

Daher sind die beiden Geraden echt parallel (nicht identisch).

Beispiel 2:

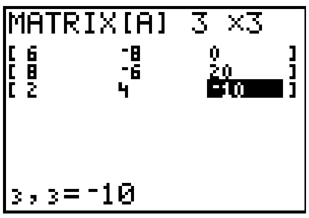
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind nicht parallel, weil ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind.
Durch Gleichsetzen der Vektorterme wird nun geprüft, ob es einen Schnittpunkt gibt:

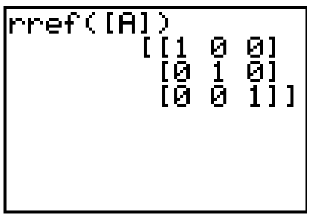
$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ Ordnen: $\lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vereinfachen: $\begin{pmatrix} 6\lambda - 8\mu \\ 8\lambda - 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$ Als Matrix (bzw. LGS): $\begin{vmatrix} \cdot\lambda & \cdot\mu & \cdot 1 \\ 6 & -8 & 0 \\ 8 & -6 & 20 \\ 2 & 4 & -10 \end{vmatrix}$

Lösung mit dem TI83 (Matrixmodul):



Jetzt QUIT
und dann
MATRIX MATH rref(
und noch MATRIX [A]
ENTER



Interpretation:
λ = 0
μ = 0
0 = 1 Widerspruch !

Ergebnis: Wegen des Widerspruchs gibt es keinen Schnittpunkt.
Da die Geraden auch nicht parallel sind müssen sie **windschief** sein .

Beispiel 3:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Vorgehensweise ist hier wie bei Beispiel 2.
Hier allerdings erhält man für λ und μ ein eindeutiges Ergebnis ohne Widerspruch (nachprüfen !) .
Daher gibt es einen Schnittpunkt S. Dessen Ortsvektor wird wie folgt (mit $\mu = 0$) berechnet :

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Es folgt also: **S(2/1/-3)**

Ebenso hätte man den Schnittpunkt mittels $\lambda = 1$ bestimmen können .

Beispiel 4:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **h:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Hier sind die Richtungsvektoren kollinear ($\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$). Daher sind die Geraden parallel.
Überprüfung auf Identität:

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist zu den Richtungsvektoren kollinear. Z.B.: $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Deswegen sind die beiden Geraden **identisch** .

Zeichnerische Veranschaulichung der Fälle 1 und 4 (g || h sowie g=h) .

Man sieht, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ (grün) der beiden Stützvektoren nicht kollinear zum Richtungsvektor von g bzw. h (rot) ist, sofern g und h echt parallel sind. Denkt man sich nun h in Richtung zu g verschoben, so wandert der grüne Pfeil immer mehr in eine zu g bzw. h parallele Lage. Im Grenzfall g=h liegt der grüne Pfeil genau auf beiden (identischen) Geraden.