Schiffskarambolagen und Inzidenz von Geraden

Ein Schiff startet in A(-5/8) und erreicht in einer Stunde B(2/1) . (Koordinaten in km) ,
Ein zweites Schiff startet gleichzeitig in F(-3/-3) und erreicht in einer Stunde G(1/-2) .

<u>Aufgaben:</u>

a) Zeige rechnerisch, dass die beiden Routen sich treffen und bestimme den Schnittpunkt.
Stelle die Routen auch zeichnerisch dar .

b) Die <u>Länge des Richtungsvektors</u> einer Geraden lässt sich auch als <u>Geschwindigkeit v</u> deuten.
Bestimme so die Geschwindigkeiten v1 und v2 der beiden Schiffe.
Untersuche auch, ob die Schiffe zusammenstoßen.

c) Simuliere die Schiffsbewegungen mit dem Parametric-Modus des TI 83 .
Dazu folgende Vorüberlegungen:

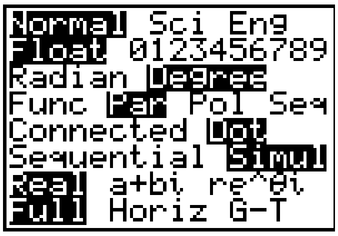
Eine Geradengleichung der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} px \\ py \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} ux \\ uy \end{pmatrix}$ lässt sich in ein LGS mit 2 Gleichungen aufspalten,

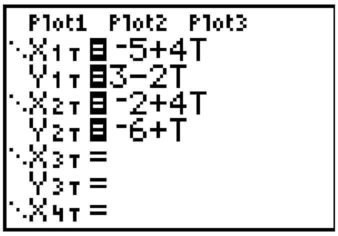
wenn man den Vektor $\vec{x}$ als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ schreibt: $\begin{vmatrix} x & = & px + t \cdot ux \\ y & = & py + t \cdot uy \end{vmatrix}$ oder genauer: $\begin{vmatrix} x(t) & = & px + t \cdot ux \\ y(t) & = & py + t \cdot uy \end{vmatrix}$

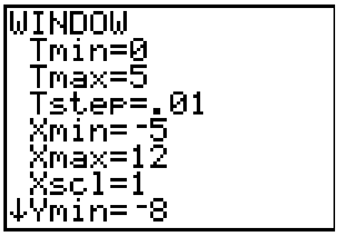
Es entstehen also 2 Parametergleichungen für x(t) und y(t) mit dem Parameter t .
Da die Länge des Richtungsvektors als Geschwindigkeit deutbar ist, muss folglich der Parameter t die Zeit sein (dies folgt aus Weg = Zeit·Geschwindigkeit). x(t) und y(t) sind natürlich die Wegstrecken.

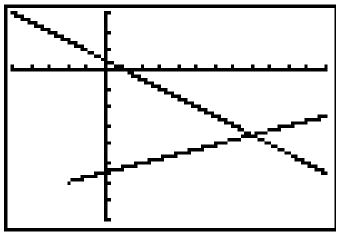
Der TI83 kann die beiden Parametergleichungen im Par-Modus (MODE-Menü) darstellen. Außerdem kann er die den Gleichungen zugrunde liegende Bewegung simulieren (Simul im MODE-Menü einstellen).
Im Y= - Editor werden die Parametergleichungen eingestellt.
Stellt man das WINDOW sinnvoll ein, so erzeugt GRAPH die Bewegung !

Beispiel für eine Simulation mit Par und Simul:









Hinweis: TStep steuert die Simulationsgeschwindigkeit !
Beachte, dass die Simulation der Bewegung nur am Rechner zu beobachten ist.

<u>Weitere Aufgaben:</u>

Simuliere nun die Bewegungen der beiden oben beschriebenen Schiffe mithilfe geeigneter Parametergleichungen und beobachte am Rechner, ob es zur Kollision kommt !

Ändere die Geschwindigkeit eines der beiden Schiffe so, dass beide kollidieren !

Lösungen:

Zu a) Schiff 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ Schiff 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die beiden Geraden können nicht parallel sein (warum ?), daher haben sie einen Schnittpunkt S .
Gleichsetzen der Vektorterme liefert folgendes LGS

$7\lambda - 4\mu = 2$

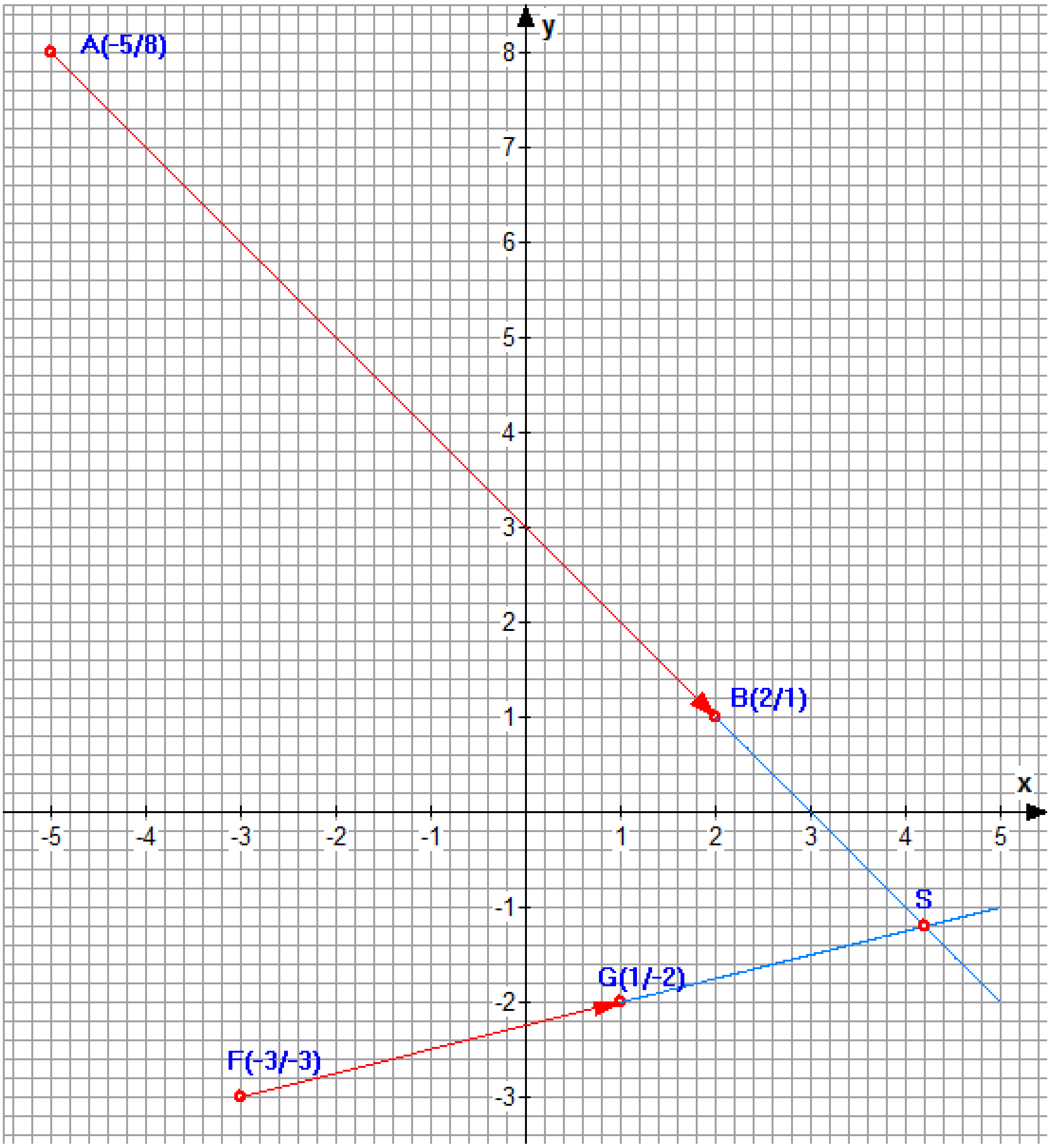
$-7\lambda - \mu = -11$ mit den Lösungen $\lambda = 46/35 \approx 1{,}31$ und $\mu = 1{,}8$.

Deutung von λ und μ:

Das Schiff 1 braucht 1,31 Stunden, um S zu erreichen, Schiff 2 hingegen braucht 1,8 Stunden.

Berechnung des Schnittpunktes S, z.B. mit der zweiten Vektorgleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 1{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$

Also S(4,2 / -1,2)

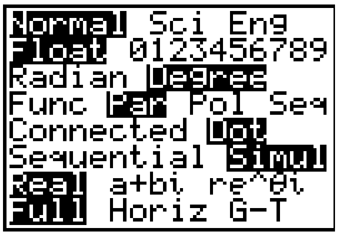


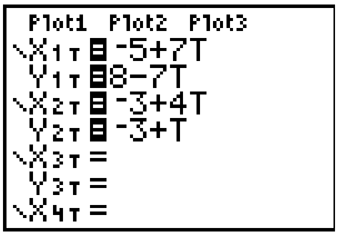
Zu b) Geschwindigkeiten: $|v_1| = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ $|v_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}1$

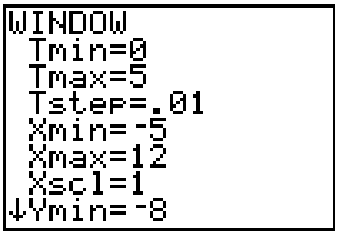
Die Schiffe stoßen nicht zusammen, denn das erste Schiff hat wegen seiner größeren Geschwindigkeit den Kreuzungspunkt S viel schneller erreicht als Schiff 2 .

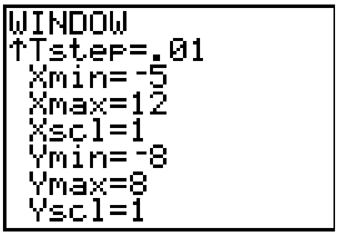
Zu c) Simulation der Schiffsbewegung mittels TI83:

Erst die Voreinstellungen:

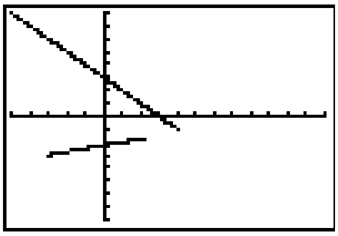






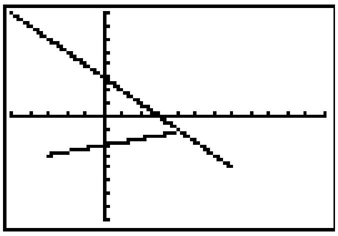


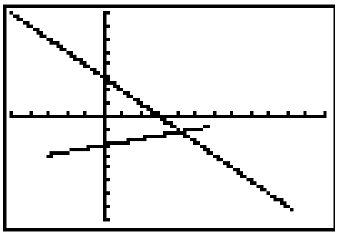
Nun schrittweise der Bewegungsablauf (Unterbrechung der Bewegung durch Drücken der ENTER-Taste) :



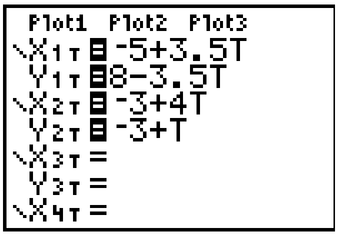
Man erkennt hier, dass Schiff 2 „hinterherhinkt“.

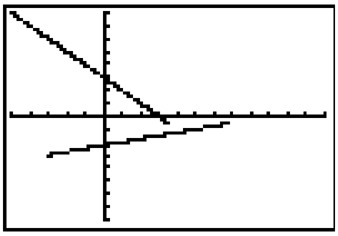
Nun wieder ENTER drücken ....





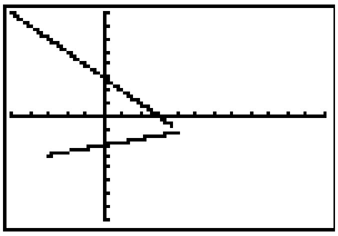
Will man erreichen, dass die Schiffe kollidieren, so muss man entweder Schiff 1 langsamer bewegen oder Schiff 2 schneller. Man muss also die Geschwindigkeitsvektoren entsprechend ändern.
Dies versuchen wir durch Probieren. Wir verkleinern den Geschwindigkeitsvektor von Schiff 1, aber ohne die Richtung des Schiffes zu ändern !
Z.B. wählen wir v1x = 3,5 und v1y = -3,5 (Halbierung des Geschwindigkeitsvektors von Schiff 1 !)





Schiff 1 ist jetzt zu langsam !

Variiere v1x und v1y so lange, bis das folgende Bild erscheint



Theoretisch betrachtet sieht das Kollisionsproblem so aus:

Es muss gelten: $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Zeiten müssen gleich sein, weil beide Schiffe zur gleichen Zeit S erreichen sollen.
v1x=-v1y ist vorgegeben durch die Richtung des 1. Schiffes. Abkürzend wird v1x=k gesetzt.

<u>Nun los mit der Rechnung:</u>

Aus der Vektorgleichung folgt -5+kt = -3+4t und 8-kt = -3+t

Umformung: t(k-4) = 2 und t(-k-1) = -11
t = 2/(k-4) und t = 11/(k+1)
Gleichsetzen der t-Werte liefert 2/(k-4) = 11/(k+1)
Es folgt (k-4)/2 = (k+1)/11
11(k–4) = 2(k+1)
11k – 44 = 2k + 2, woraus dann k = 46/9 folgt (ca. 5,1)