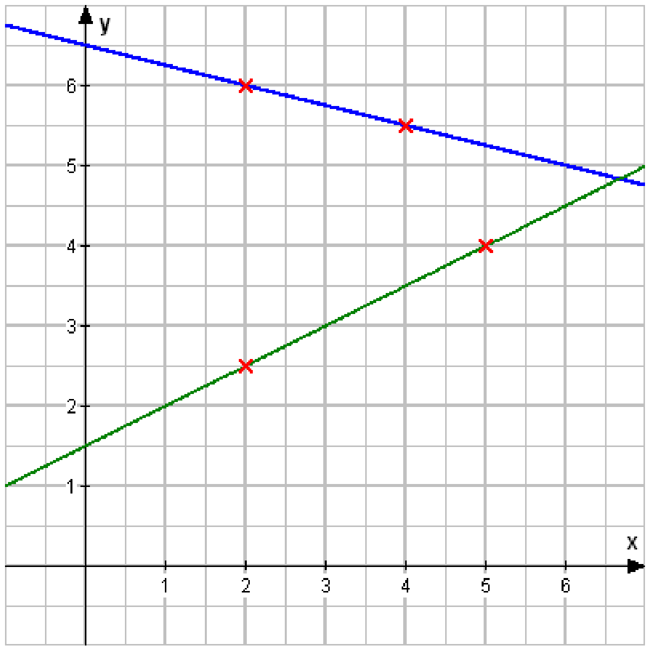
Schnitt von Geraden vektoriell betrachtet

1) Der 2-dimensionale Fall:



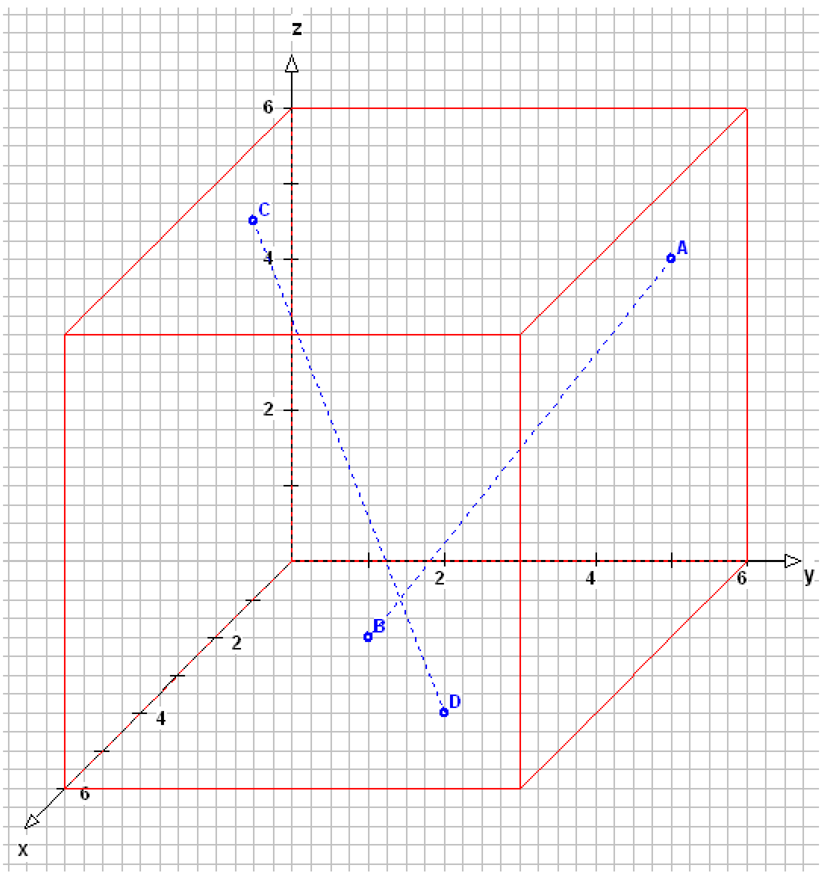
In der Grafik sind die beiden Geraden g = (AB) und h = (CD) gegeben mit A(2/6), B(4/5,5), C(2/2,5), D(5/4) . Offensichtlich schneiden sich diese Geraden in einem Punkt S .

Aufgabe:

a) Beschrifte die 5 Punkte und die beiden Geraden und zeichne folgende Vektoren ein:
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OS}$.

b) Stelle die **Vektorgleichungen** für die beiden Geraden g, h auf und bestimme den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Schnittpunktes S durch Gleichsetzen der Vektorterme und Lösen des sich ergebenden LGS. Welche geometrische Bedeutung haben λ und μ ?

2) Der 3-dimensionale Fall:



In der Grafik sind die 4 Punkte A(2/6/5), B(6/4/2), C(1/0/5), D(4/4/0) und 2 Verbindungsstrecken in einen Würfel eingezeichnet . Dabei liegen alle 4 Punkte auf den Seitenflächen des Würfels.

Aufgabe:

Zeichne die Geraden g = (AB) und h = (CD) ein (verdeckte Linien stricheln). Zeichne ferner die Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}$ ein . Untersuche dann rechnerisch die Lagebeziehung zwischen g und h .

Anleitung:
- Vektorgleichungen für g und h aufstellen.
- Vektorterme Gleichsetzen und LGS aufstellen.
- LGS mittels MATRIX des GTR lösen .
- Lösung geometrisch deuten .

Lösungen (ohne Grafik):

1) g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

LGS: $\left| \begin{array}{rcr} 2\lambda - 3\mu & = & 0 \\ -0{,}5\lambda - 1{,}5\mu & = & -3{,}5 \end{array} \right|$ Lösung: $\left| \begin{array}{rcr} \lambda & = & 7/3 \\ \mu & = & 14/9 \end{array} \right|$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 29/6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}67 \\ 4{,}83 \end{pmatrix}$

Geom. Bedeutung: λ, μ geben die Faktoren für den Richtungsvektor an, um S zu erreichen.

2) g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

LGS: $\left| \begin{array}{rrcr} 4\lambda - & 3\mu & = & -1 \\ -2\lambda - & 4\mu & = & -6 \\ -3\lambda + & 5\mu & = & 0 \end{array} \right|$ Lösung: $\left| \begin{array}{lrcr} \lambda & & = & 0 \\ & \mu & = & 0 \\ 0 & & = & 1 \end{array} \right|$ Es ergibt sich ein Widerspruch !

Der Widerspruch bedeutet, dass die Geraden sich nicht schneiden.
Da die Geraden auch nicht parallel zueinander sein können (Richtungsvektoren) sind sie **windschief** .