Das Vektorprodukt – *eine Herleitung* *Ac*

Gesucht ist ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, der orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ist .

Der Ansatz $\vec{n} * \vec{a} = 0 \ \wedge \ \vec{n} * \vec{b} = 0$ führt auf das LGS $\left| \begin{array}{ccccccc} n_x a_x & + & n_y a_y & + & n_z a_z & = & 0 \\ n_x b_x & + & n_y b_y & + & n_z b_z & = & 0 \end{array} \right|$.

Gesucht sind die Komponenten n_x, n_y, n_z des Normalenvektors . Das LGS muss also eine Lösung für n_x, n_y, n_z liefern, die nur von den (vorgegebenen) Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt .

Rechenweg zur Auflösung des LGS (wegen der Indizes sehr fehleranfällig !):
Wir entscheiden uns dafür, aus I (1.Gleichung) n_y, und aus II (2.Gleichung) n_x zu eliminieren.
Dies erreichen wir durch die Operationen

$b_y \cdot \mathrm{I} - a_y \cdot \mathrm{II}$ sowie $b_x \cdot \mathrm{I} - a_x \cdot \mathrm{II}$

Zunächst werden die Gleichungen mit den oben angegebenen Faktoren multipliziert:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} n_x a_x b_y & + & n_y a_y b_y & + & n_z a_z b_y & = & 0 \\ n_x b_x a_y & + & n_y b_y a_y & + & n_z b_z a_y & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccccccc} n_x a_x b_x & + & n_y a_y b_x & + & n_z a_z b_x & = & 0 \\ n_x b_x a_x & + & n_y b_y a_x & + & n_z b_z a_x & = & 0 \end{array} \right|$$

Subtrahiert man jetzt die Gleichungen in beiden LGSn, so erhält man 2 reduzierte Gleichungen:

$$n_x a_x b_y - n_x a_y b_x + n_z a_z b_y - n_z a_y b_z = 0$$

$$n_y a_y b_x - n_y a_x b_y + n_z a_z b_x - n_z a_x b_z = 0$$

Diese kann man wieder als LGS schreiben . Sinnvollerweise wird auch noch ausgeklammert:

$$\left| \begin{array}{ccccc} n_x(a_x b_y - a_y b_x) & + & n_z(a_z b_y - a_y b_z) & = & 0 \\ n_y(a_y b_x - a_x b_y) & + & n_z(a_z b_x - a_x b_z) & = & 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} n_x & = & \dfrac{a_y b_z - a_z b_y}{a_x b_y - a_y b_x} n_z \\ n_y & = & \dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x} n_z \end{array} \right|$$

Da n_x und n_y von n_z abhängen dürfen wir n_z frei wählen. Diese Wahl ist dann besonders geschickt, wenn wir für n_z den (übereinstimmenden) Nenner der beiden Brüche verwenden ! Also $n_z = a_x b_y - a_y b_x$.
Dann folgt $n_x = a_y b_z - a_z b_y$ sowie $n_y = a_z b_x - a_x b_z$.

Ein möglicher zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonaler Vektor ist dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

<u>Hinweis:</u> Der so entstandene Vektor heißt Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

<u>Definition:</u> Man nennt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ **<u>Vektorprodukt</u>** oder auch **<u>Kreuzprodukt</u>** .

Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \ \wedge \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

Im Gegensatz zum Skalarprodukt entsteht kein Skalar (eine Zahl), sondern ein Vektor.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 1 - 2(-7) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-7) - (-8) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Man kann mit dem Vektorprodukt auch Normalenformen von Ebenen bestimmen. Wie ?